TD 6 - Groupe fondamental et théorème de Van Kampen

Notions du cours.

- Produit libre et produit amalgamé de groupes.
- Présentation de groupes par générateurs et relations.
- Groupe fondamental et théorème de Van Kampen.

Groupes, produits libres, produits amalgamés.

Exercice 1. Montrer que les groupes $< a, b \ ; \ abab^{-1} >$ et $< u, v \ ; \ u^2v^2 >$ sont isomorphes. Faire de même avec les groupes $< a, b \ ; \ a^3b^{-2} >$ et $< u, v \ ; \ uvuv^{-1}u^{-1}v^{-1} >$.

Exercice 2. Soit G un groupe. Le groupe dérivé de G, noté $D(G)$ ou $[G, G]$, est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$, avec g, h qui varient dans G.

(a) Montrer que $[G, G]$ est un sous-groupe normal de G.

L'*abélianisé* de G est le quotient $\mathrm{Ab}(G) = G/[G, G]$.

(b) Montrer que si deux groupes G, H sont isomorphes, alors leurs abélianisés sont isomorphes.

Soit F_n le groupe libre à n générateurs.

(c) Montrer que $\mathrm{Ab}(F_n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

(d) Montrer que $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^m$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

(e) Déduire que F_n et F_m sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exercice 3.

(a) Montrer que l'abélianisé du groupe $G =< t_1, \cdots, t_n \ ; \ t_1^2t_2^2 \cdots t_n^2 >$ est $\mathbb{Z}^{n-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que, plus généralement, si G est un groupe de type fini, représenté par $< S \ ; \ R >$ avec S un ensemble fini de générateurs et R un ensemble fini de relations, alors son abélianisé est le groupe quotient du groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{card(S)}$ par l'image $\varphi(R)$ de R à travers la surjection canonique $\varphi :< S > \longrightarrow \mathbb{Z}^{card(S)}$.

(c) Montrer que si $G_1 =< S_1 \ ; \ R_1 >$, $G_2 =< S_2 \ ; \ R_2 >$ sont donnés par générateurs et relations, alors pour son produit libre on a $G_1 * G_2 =< S_1, S_2 \ ; \ R_1, R_2 >$.

(d) Montrer de même que si H est engendré par S, et $\varphi_1 : H \to G_1$, $\varphi_2 : H \to G_2$ sont des morphismes de groupes alors le produit amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de H est

$$G_1 *_H G_2 =< S_1, S_2 \ ; \ R_1, R_2, \varphi_1(s)\varphi_2^{-1}(s), s \in S > .$$

Calcul de groupes fondamentaux.

Exercice 4. Soit $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore, Y la bouteille de Klein et $Z = \mathbb{RP}^2$ le plan projectif réel.

(a) Calculer les groupes fondamentaux de X, Y et Z.

(b) Calculer les groupes fondamentaux de X^*, Y^* et Z^*, où M^* est l'espace topologique M privé d'un point.

Exercice 5. Soit V un k-sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(a) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^n \setminus V$ pour $0 \leq k \leq n-2$.

(b) Que se passe-t-il quand $k = n - 1$?

Exercice 6.

(a) Calculer le groupe fondamental du complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer le groupe fondamental du complémentaire de deux droites dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (**Espaces lenticulaires**). Soient p et q deux entiers premiers entre eux, $p \neq 0$. Notons r la rotation de $\mathbb{R}^3$, d'axe vertical orienté suivant la base canonique, et d'angle $2\pi/p$, et notons σ la symétrie orthogonale par rapport au plan $x_3 = 0$. L'*espace lenticulaire* $L_{p,q}$ est le quotient de la boule $\mathbb{B}^3$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie un point x de l'hémisphère nord S^2_+ du bord $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{B}^3$ avec le point $\sigma(r^q(x))$ de l'hémisphère sud S^2_- de ce même bord.

(a) Quel espace on obtient si $p = 1$? Et si $p = 2$?

(b) Calculer $\pi_1(L_{p,q})$.

Exercice 8 (**Graphes et arbres**). Un *graphe (fini)* est un espace cellulaire fini de dimension 1. Un *arbre* est un graphe (fini) contractile. Un arbre A inclus dans un graphe G est dit *maximal* s'il n'est pas inclus strictement dans un autre sous-arbre de G.
Soit G un graphe fini connexe et A un arbre maximal dans G. Montrer que G et G/A ont même type d'homotopie et que G/A est un bouquet de cercles.

Exercice 9. Soit $p : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique par rapport au point $N = (0, \dots, 0, 1)$. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$ telle que $\mathbb{R}^n \setminus K$ est connexe.

(a) Montrer que $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^n \setminus p^{-1}(K))$. Que se passe-t-il si $\mathbb{R}^n \setminus K$ n'est pas connexe ? Et quand $n = 2$?

Pour toute application linéaire affine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, soit $C_f(x_0, r)$ le cercle de centre x_0, rayon r et contenu dans $\{f(x, y, z) = 0\}$. Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus K$ dans les cas suivants :

(b) $K = C_z((0, -3, 0), 1) \cup C_z((0, 3, 0), 1)$.

(c) $K = C_z((0, -1, 0), 1) \cup C_z((0, 1, 0), 1)$.

(d) $K = C_z((0, 0, 0), 1) \cup C_x((0, 1, 0), 1)$.

Exercice 10. Construire des espaces topologiques connexes par arcs et avec groupe fondamental Γ indiqué :

(a) le groupe cyclique fini $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n \geq 2$.

(b) le groupe diédral $D_n =< \rho, \sigma\ ;\ \sigma^2, \rho^n, (\rho\sigma)^2 >$, avec $n \geq 2$.

(c) le groupe des tresses à 3 brins $T_3 =< \sigma_1\sigma_2\ ;\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} >$.

(d) le groupe des permutations de 3 éléments $S_3 =< \sigma_1\sigma_2\ ;\ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} >$.

Exercice 11. On veut montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, que $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(a) Expliquer pourquoi $\pi_1(\mathrm{SO}(3)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Supposons que $n \geq 4$ et que $\pi_1(\mathrm{SO}(n-1)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $N = e_1 = (0, \dots, 0, 1) \in S^{n-1}$, $S = -e_n \in S^{n-1}$, $U = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{S\}$ et $V = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$. Soit q la projection de $\mathrm{SO}(n)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ définie par $A \mapsto Ae_n$. Soit r l'application de U dans $\mathrm{SO}(n)$ qui associe à chaque point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U la rotation r_x^N dans le plan engendré par N et x transformant N en x (et l'identité si $x = N$).

(b) Montrer que $r_x^N = \left(\begin{array}{c|c} I - \dfrac{1}{1+x_n} X X^T & X \\ \hline -X^T & x_n \end{array}\right)$ et en déduire que r est continue.

(c) On identifie $\mathrm{SO}(n-1) \in B$ avec $\hat{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0^T & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{SO}(n)$. Soit ρ donnée par $\rho(x) = (x_1, \dots, x_{n-2}, -x_{n-1}, -x_n)$.

Montrer que $\Phi_U : U \times \mathrm{SO}(n-1) \to q^{-1}(U)$ et $\Phi_V : V \times \mathrm{SO}(n-1) \to q^{-1}(V)$ définis par $\Phi_U(x, B) = r_x^N \hat{B}$ et $\Phi_V(x, B) = \rho r_{\rho x}^N \hat{B}$ sont des homéomorphismes.

(d) Montrer que les inclusions $i_U : (U \cap V) \to \mathrm{SO}(n-1) \hookrightarrow U \times \mathrm{SO}(n-1)$ et $i_V : (U \cap V) \to \mathrm{SO}(n-1) \hookrightarrow V \times \mathrm{SO}(n-1)$ induisent des isomorphismes pour les groupes fondamentaux.

(e) En déduire que $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{C}$, on dénote par $C(z, r)$ le cercle de centre z et rayon r. Soient $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} C(n, n)$ et $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(a) Montrer que X et Y ne sont pas homéomorphes.

(b) Montrer que $\pi_1(X)$ est le groupe libre avec une quantité dénombrable de générateurs.

(c) Montrer que $\pi_1(Y)$ n'admet pas une famille génératrice dénombrable. Déduire que $X \not\simeq Y$.

Variétés topologiques.

Définition. Une *n-variété* est un espace topologique X qui est à base dénombrable, séparé, et localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$: pour tout point $p \in X$ il existe U voisinage ouvert de p et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ (on peut imposer V une boule ouverte) tels que $U \cong V$. Les 1-variétés sont dites *courbes (simples)*, et les 2-variétés sont dites *surfaces.*

Plus précisément, la définition donnée est celle de n-variété *topologique*, lisse, sans bord. On supposera de même que nos variétés sont toujours *connexes.*

Exercice 13. Quels espaces topologiques parmi les suivants sont des variétés ?

(a) $\mathbb{S}^n$, (b) $\mathbb{B}^n$, (c) $\mathbb{RP}^n$, (d) $\mathbb{CP}^n$,

(e) $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{R}^2$, (f) $C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = \alpha x^2 + x^3\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 (Classification des courbes). Le but de cet exercice est montrer que une 1-variété X est homéomorphe à $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est non compacte, et homéomorphe à $\mathbb{S}^1$ si et seulement si elle est compacte.

(a) Montrer que X est triangulable : il existe un complexe cellulaire (fini ou dénombrable) Y de dimension 1 tel que $X \cong Y$.

Le degré d'un sommet (une 0-celle) d'un graphe Y est le nombre d'arêtes (1-celles) qui sont attachés à y. Ce nombre est compté avec multiplicité, au sens que si une arête a ses points de bord attachés au même point p, alors il donne une contribution 2 au calcul du degré.

(b) Montrer que tout sommet p de Y a degré exactement 2.

(c) Conclure.

Exercice 15. Soient X et Y deux n-variétés, x_0 et y_0 deux points, U et V voisinages de x_0 et y_0 tels que $(U, x_0) \cong (V, y_0) \cong (\mathbb{B}^n, 0)$ (l'existence de ces homéomorphismes, qu'on appelle ϕ et ψ, est garantie de la définition de variété).
On construit un nouveau espace topologique $X\#Y$ comme

$$X\#Y = X \setminus \mathring{U} \cup_{\mathbb{S}^{n-1}} Y \setminus \mathring{V},$$

où $\partial U \ni x \sim y \in \partial V$ si et seulement si $\phi(x) = \psi(y) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(a) Montrer que $X\#Y$ est une n-variété, dite *somme connexe* de X et Y.

(b) Montrer que pour toute n-variété X, on a que $X \cong X\#\mathbb{S}^n$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^n\#\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$.

(d) Montrer que la bouteille de Klein est homéomorphe à la somme connexe de deux plans projectifs réels.

(e) Calculer le groupe fondamental de la somme connexe de n copies du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Remarquer que la somme connexe peut être construite plus en général, entre deux espaces X, Y qui sont localement homéomorphes en deux points $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ donnés à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas on spécifie les points bases et on écrit $(X, x_0)\#(Y, y_0)$.

Définition. Considérons le disque $\mathbb{B}^2 \cong \overline{\mathbb{D}}$, vu comme le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On divise $\partial\mathbb{D}$ en n arcs $I_0, \ldots, I_{n-1}$ de la même longueur : $I_k = \left\{p_k(t) = e^{2\pi \mathrm{i}(k+t)/n} \mid t \in [0, 1]\right\}$. Soient $L = \{a_1, \ldots, a_r\}$ un ensemble fini, et $i : \{0, \ldots, n-1\} \to L$ et $\varepsilon : \{0, \ldots, n-1\} \to \{\pm 1\}$ deux fonctions (la première qu'on peut supposer surjective). On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ engendrée par :

$$p_k(t) \sim p_h(s) \quad \text{si } i(k) = i(h) \text{ et } 1/2 + \varepsilon(k)(t - 1/2) = 1/2 + \varepsilon(h)(s - 1/2).$$

Soit $W = i(1)^{\varepsilon(1)} \cdots i(n)^{\varepsilon(n)}$; on dénote par $X(W)$ l'espace topologique $X(W) = \overline{\mathbb{D}}/\mathcal{R}$.
Noter que pour $n \geq 3$ on pourrait définir $X(W)$ en termes du n-polygone régulier, avec identifications des cotés déterminés par W.
On appelle $X(W)$ l'*espace polygonale* associé au mot W (nom pas standard en littérature).

Exercice 16 (Surfaces comme espaces polygonales). Montrer qu'on espace polygonale $X(W)$ est une surface si et seulement si pour tout $a \in L$, $\mathrm{Card}(i^{-1}(a)) = 2$ (c'est-à-dire, si chaque lettre dans W apparait exactement deux fois).
En fait, toute surface compacte est homéomorphe à une surface X construite comme ci-dessus. Ce résultat est une conséquence du théorème de triangulation des surfaces.

Exercice 17. Décrire les espaces suivantes comme espaces polygonales :

(a) $\mathbb{S}^2$, (b) $\mathbb{RP}^2$, (c) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, (d) la bouteille de Klein,

(e) la somme connexe de $(X(W_1), 0)$ et $(X(W_2), 0)$ (W_1 et W_2 sont deux mots sans lettres communes).

Exercice 18. Calculer le groupe fondamental des espaces polygonales suivants :

(a) $X(abab^{-1}a^{-1}b^{-1})$, (b) $X(abab)$, (c) $X(ab^{-1}acccb^{-1})$.

Classification des surfaces compactes sans bord

Le but des prochains exercices est de montrer le théorème suivant.

Théorème. *Toute surface (homéomorphe à un espace polygonale) est homéomorphe à l'une des surfaces suivantes :*

$$P_s = X(c_1^2 c_2^2 \cdots c_s^2) \quad \text{ou} \quad S_g = X([a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g])$$

avec $c^2 = cc$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, et $s, g \in \mathbb{N}$ (dans le cas $s = g = 0$, on dénote $P_0 = S_0 = \mathbb{S}^2$).

Dans la suite, on dénotera par W une suite finie de lettres (ou leur inverse). Dans ce ca on indiquera avec W^{-1} la suite prise en sens inverse, et avec orientations inverses (c'est-à-dire, $i'(k) = i(n-1-k)$ et $\varepsilon'(k) = -\varepsilon(n-1-k)$). De plus, parfois on aura besoin de considérer des espaces plus généraux que les espaces polygonales, notamment le quotient de plusieurs (deux) polygones/disques par des identifications des cotés. Dans ce cas on dénotera $X(W_1//W_2)$ l'espace obtenu en considérant deux disques, avec les identifications dictées par les mots W_1, W_2.

Exercice 19. Montrer les propriétés suivantes.

(a) $X(W_1//W_2) \cong X(W_1^{-1}//W_2) \cong X(W_2//W_1)$.

(b) si $X(W_1) \cong X(W_1')$, alors $X(W_1//W_2) \cong X(W_1'//W_2)$ (propriété vraie aussi dans le cas où la même lettre apparait dans W_1 et W_2).

(c) $X(W_1W_2) \cong X(W_2, W_1)$.

(d) $X(W_1W_2) \cong X(W_1e//e^{-1}W_2)$, où e est une nouvelle lettre.

(e) $X(Waa^{-1}) \cong X(W)$.

(f) $X(W_1abW_2(ab)^\varepsilon) \cong X(W_1eW_2e^\varepsilon)$, où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et e est une nouvelle lettre qui remplace ab.

Exercice 20. Montrer les propriétés suivantes :

(a) $X(W_0aW_1aW_2) \cong X(W_0W_1^{-1}eeW_2)$.

(b) $X(W_0aW_1bW_2a^{-1}W_3b^{-1}) \cong X(cdc^{-1}d^{-1}W_1W_0W_3W_2)$.

(c) $X(W_0aba^{-1}b^{-1}W_1cc) \cong X(W_1^{-1}ddeeW_0^{-1}ff)$.

(d) $X(abbW) \cong X(ccaW)$.

Exercice 21. Montrer le théorème de classification des surfaces compactes sans bord, pour des surfaces données par des espaces polygonales.
On rappelle que $X = X(W)$ est une surface si chaque lettre apparait dans W exactement 2 fois. Si elle apparait avec le même exposant ($a \cdots a$ ou $a^{-1} \cdots a^{-1}$), on appelle cette lettre une *paire tordue*, sinon on l'appelle une *paire complémentaire*. On dira qu'une telle paire est adjacente si les deux lettres apparaissent consécutivement.
Indication : utiliser les propriétés montrées dans l'exercice précédent, en gerant d'abord les paires tordues.

Exercice 22. Montrer les propriétés suivantes :

(a) P_s est homéomorphe à la somme connexe de s copies du plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$,

(b) $P_2 \cong K$ la bouteille de Klein.

(c) S_g est homéomorphe à la somme connexe de s copies du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(d) Montrer que $\mathbb{S}^2$, P_s et S_g pour $s, g \geq 1$ donnent de surfaces distinctes (à homéomorphisme près).

Exercice 23. Déterminer à quelles surfaces sont homéomorphes les espaces polygonaux suivants.

(a) $X(abacb^{-1}c^{-1})$; (b) $X(abca^{-1}b^{-1}c^{-1})$;

(c) $X(abcde//dbcae^{-1})$; (d) $X(aba^{-1}c//b^{-1}def//cedf)$.